ÉTUDE des STRUCTURES:
Les Treillis

1. Définitions
2. Méthode des nœuds
3. Membrures particulières
4. Méthode des sections
5. Treillis composés

INTRODUCTION

Forces externes et Forces aux joints

Par exemple,

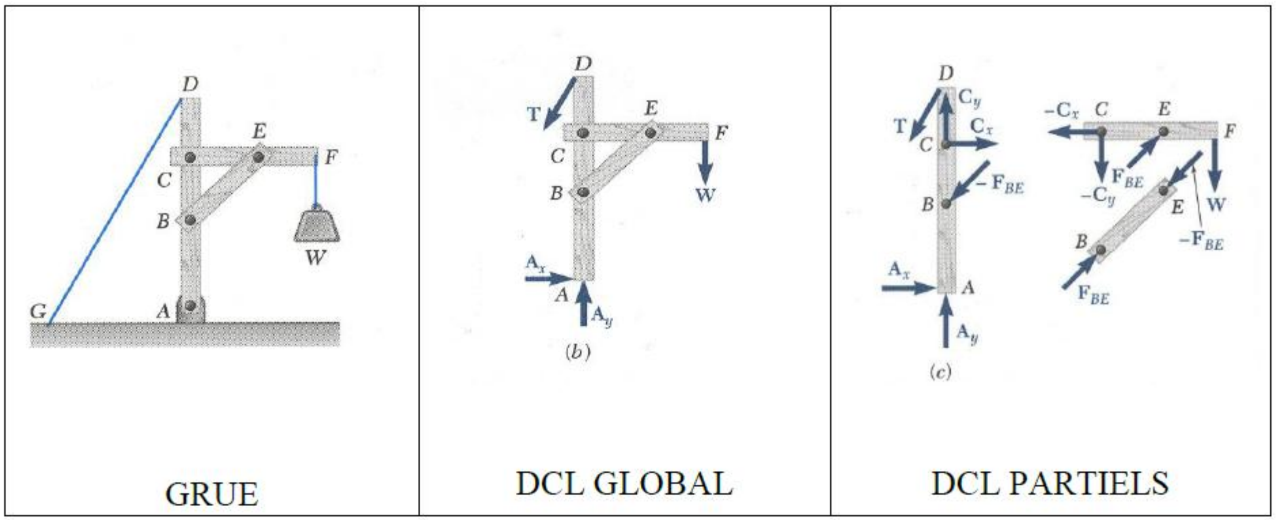


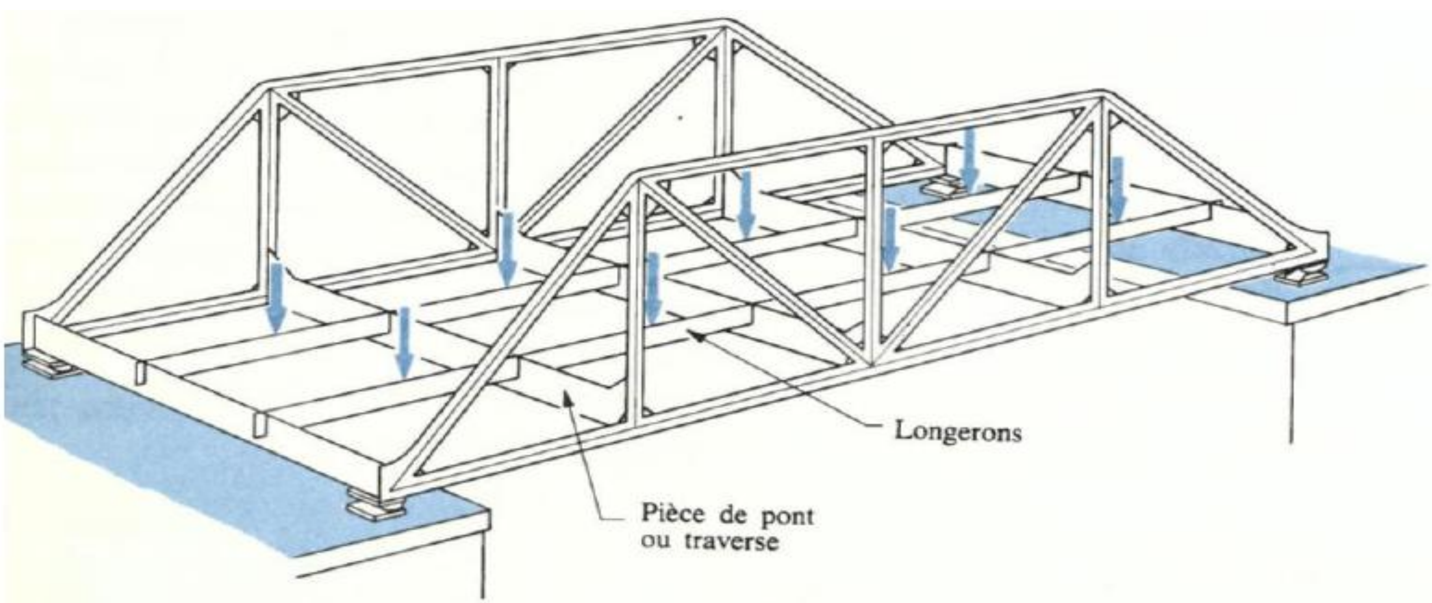
Figure 6.1

L'ACTION d'une force et sa **RÉACTION** sur des corps en contact ont la **MÊME INTENSITÉ** selon la même **LIGNE D'ACTION** mais de **SENS OPPOSÉ**

Plusieurs structures (ponts, grues, pylônes, certaines toitures) sont formées par l'assemblage de plusieurs treillis reliés de façon à former un ENSEMBLE RIGIDE DANS L'ESPACE.

- Souvent, les membrures d'un treillis sont élancées et supportent très mal les charges latérales.
  - ⇒ Les charges doivent être appliquées aux nœuds.

- Lorsqu'une charge doit être appliquée entre deux nœuds (ou charge repartie).
  - ⇒ Prévoir un plancher qui, par l'intermédiaire de ses éléments, transmet ces charges directement aux nœuds de la structure (ex.: tablier de pont)



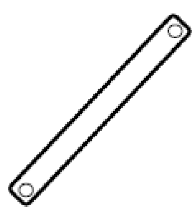
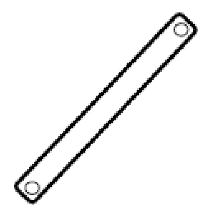
- Le poids propre des membrures de treillis est aussi considéré comme appliquée AUX NOEUDS.

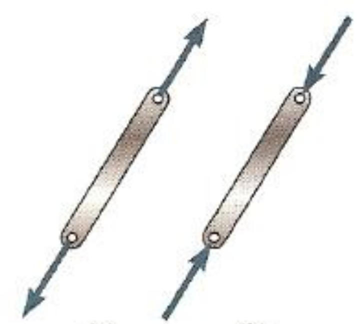
- Assemblages des nœuds $\Rightarrow$ *soudés ou rivés*

  - Les axes des membrures aboutissant au nœud doivent se couper en UN SEUL POINT :

    $\Rightarrow$ NOEUD $\equiv$ ARTICULATION $\Rightarrow$ MOMENT = 0 $\Rightarrow$ Transmet des efforts axiaux seulement $\Rightarrow$

    * TRACTION
    * COMPRESSION

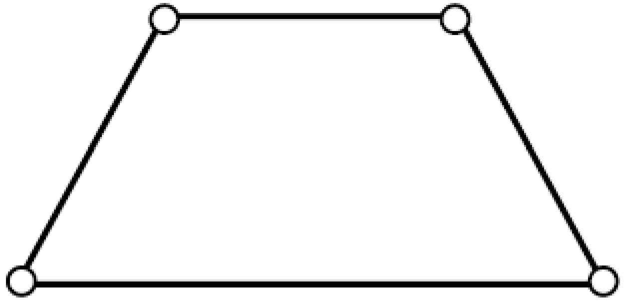
MEMBRURE	
	
(+) TRACTION	(-) COMPRESSION



(a) (b)

Treillis simples

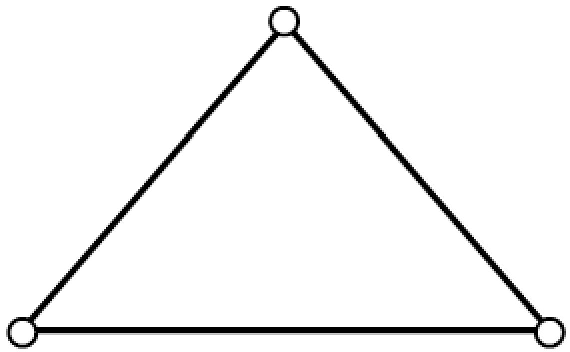
Le treillis le plus simple est le triangle. Prenons, par exemple, la structure montrée à la figure



Si une charge est appliquée sur un des nœuds supérieurs, la structure va perdre sa configuration initiale.

TREILLIS RIGIDE

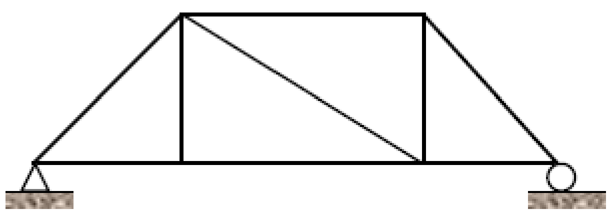
Les déformations du treillis sont **petites** et ne provoquent **pas son effondrement**.

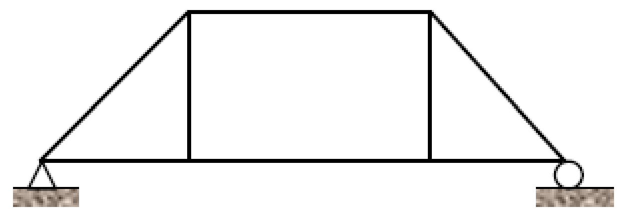


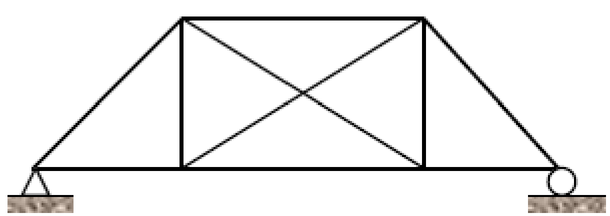
- On peut augmenter la dimension du treillis présenté en   en ajoutant chaque fois

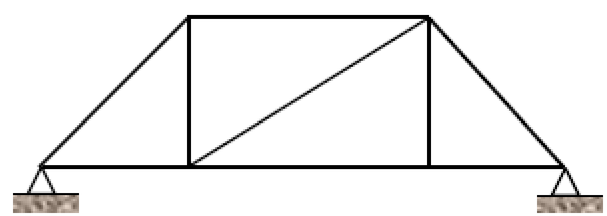
  2 barres et **un nœud** (isostatique).

Le treillis peut être isostatique, instable, ou hyperstatique









DIFFÉRENTS TYPES de TREILLIS

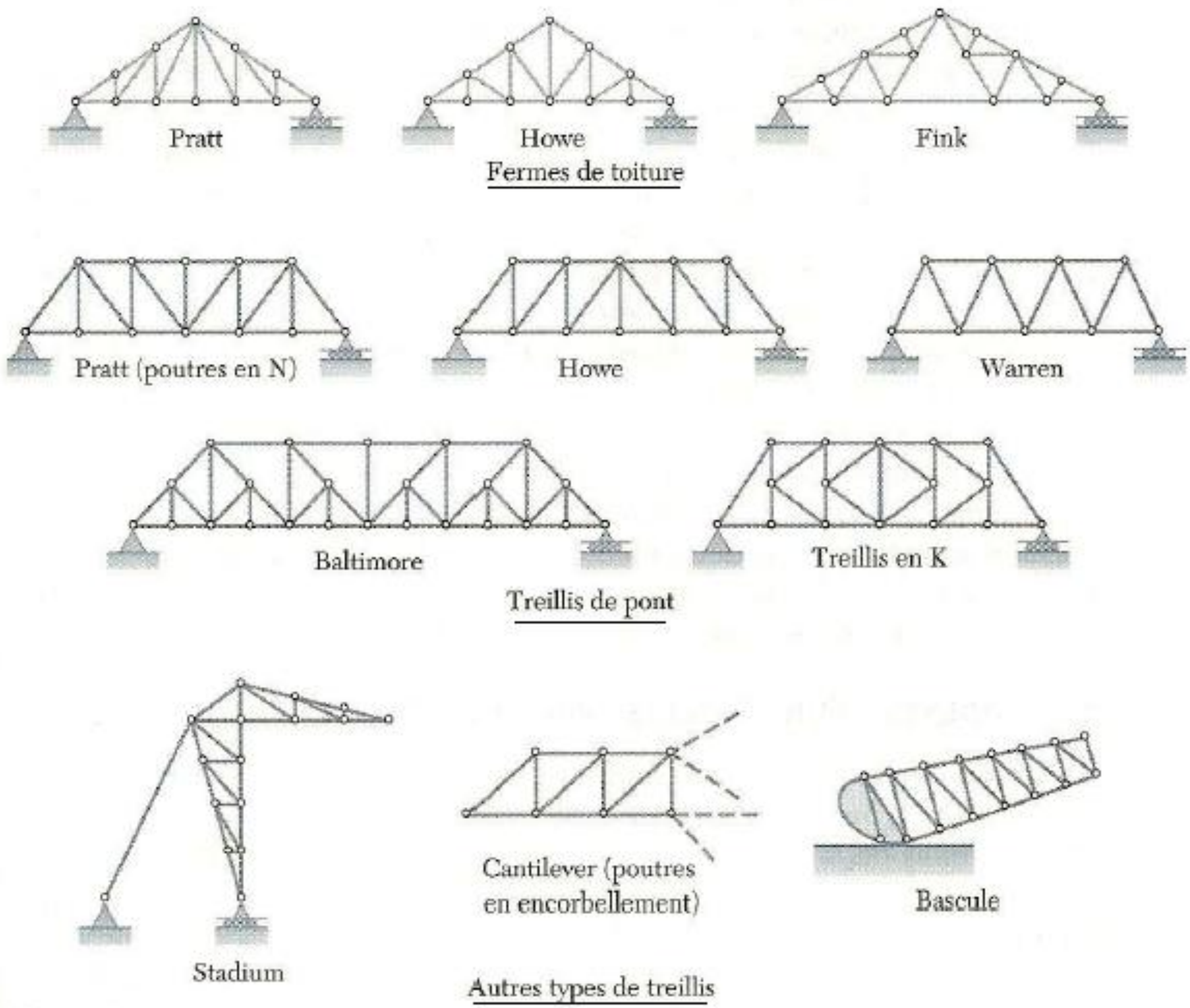


Figure 6.5

Analyse des treillis articulés par la méthode des nœuds

Théories des treillis (Culmann)

Hypothèses :

1. Charges aux nœuds seulement
2. Efforts axiaux seulement (traction ou compression)
3. Ligne d'action d'une membrure passe par le nœud $\Rightarrow$ $\boxed{\sum \mathbf{M}_{noeud} = 0 \ \ !!!}$

Comme le treillis est à l'équilibre

- **Chaque nœud** doit aussi se trouver parfaitement à l'**équilibre** selon les équations d'équilibre disponibles :
-

$$\boxed{\sum \mathbf{F}_x = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum \mathbf{F}_y = 0}$$

- Les **forces** exercées par la barre **sur les 2 nœuds** d'extrémité doivent être **égales et opposées**.
- La grandeur commune de ces 2 forces est appelée «*force dans la barre*» (même s'il s'agit en réalité d'une grandeur scalaire).

Calcul des efforts dans les barres : Méthode des nœuds.

1. Isoler un nœud où il n'y a que deux inconnues
2. Déterminer les forces dans les barres se joignant aux nœuds en question en utilisant les deux équations d'équilibre
$$\sum \mathbf{F}_x = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum \mathbf{F}_y = 0$$
3. Passer au nœud suivant n'ayant que deux inconnues au maximum en appliquant le principe d'action-réaction
4. L'équilibre de l'avant dernier nœud permet d'obtenir les forces internes de toutes les barres se rencontrant au dernier nœud
5. L'équilibre du dernier nœud permet de vérifier si le calcul a été fait correctement

Si le treillis contient "***n***" nœuds

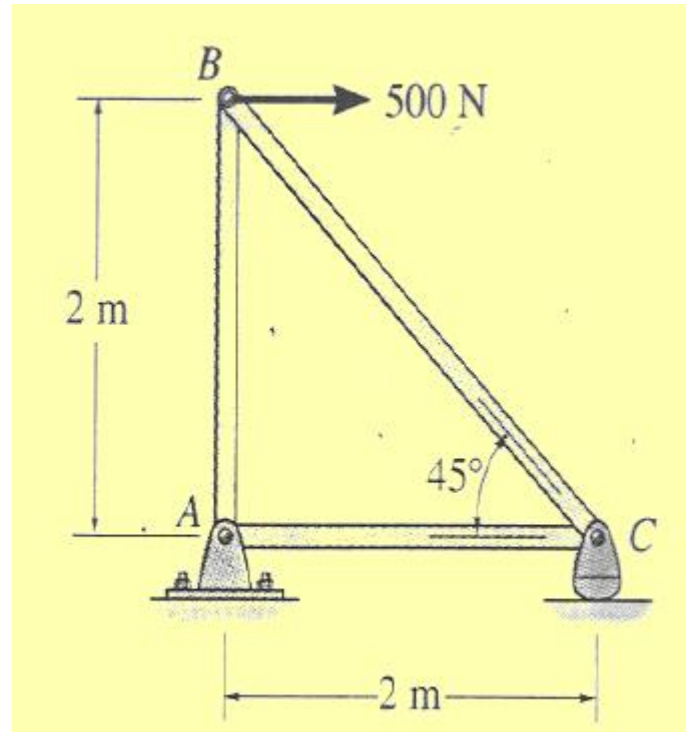
- Il y aura "***2n***" équations analytiques permettant de déterminer "***2n***" inconnues.

Le fait que le treillis tout entier est un corps rigide en équilibre

⇒ On peut écrire **3 autres équations** sur le **DCL global** permettant de déterminer rapidement les **réactions d'appuis**.

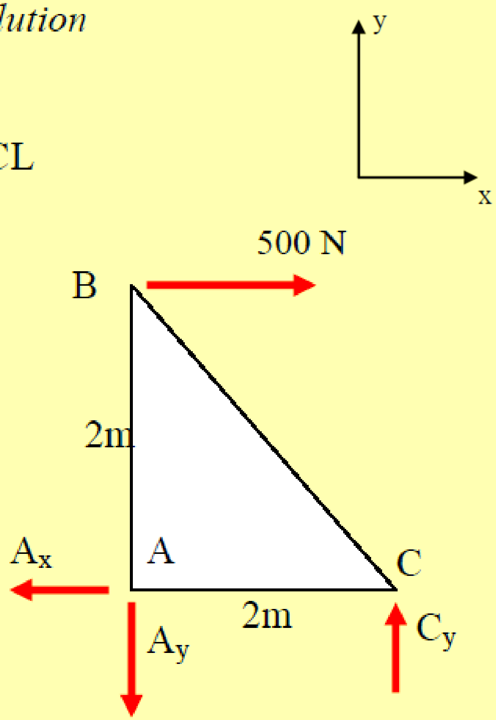
Exemple

Pour chaque élément du treillis illustré, évaluez la force interne et précisez si l'élément est en tension ou en compression.



Solution

DCL



Premièrement, il faut trouver les réactions aux appuis

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x - 500 = 0 \rightarrow A_x = 500\ N$$

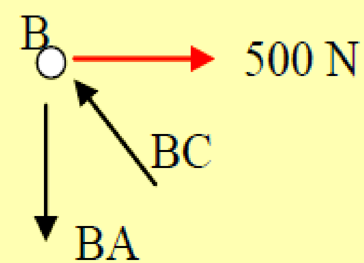
$$\sum F_y = 0 \rightarrow C_y - A_y = 0 \rightarrow A_y = C_y$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow 2C_y - 2 * 500 = 0 \rightarrow C_y = 500\ N$$

Nœud B

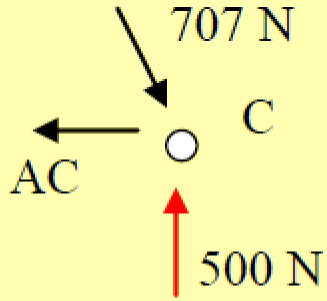
$$\sum F_x = 0 \rightarrow 500 - BC\cos 45 = 0 \rightarrow BC = 707\ N\ C$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 707\sin 45 - BA = 0 \rightarrow BA = 500\ N\ T$$

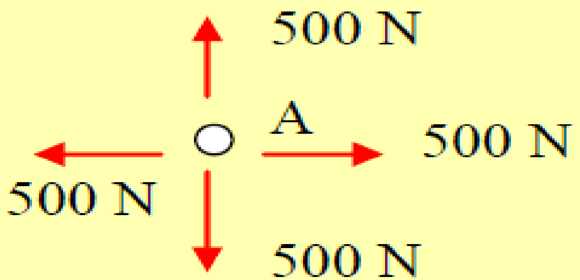


Nœud C

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \; 707\cos 45 - AC = \; 0 \; \rightarrow \; AC = 500\; N\; T$$
$$\sum F_y = 0 \rightarrow -707\sin 45 + \; 500 = 0 \; \rightarrow \; ok$$



Nœud A



Définition d’un TREILLIS

Structure composée de **membrures à 2 forces**
Utilisées dans la construction des ponts et édifices

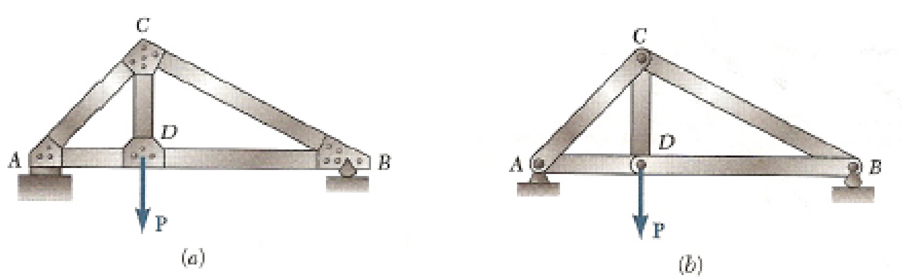


Figure 6.2

Les points de liaison sont des joints ou **nœuds**

Sur la ligne AB, **2 membrures à 2 forces: AD et DB**

CHARGES sur les TREILLIS

Structure réelle: Assemblage de plusieurs treillis en réseau 3D

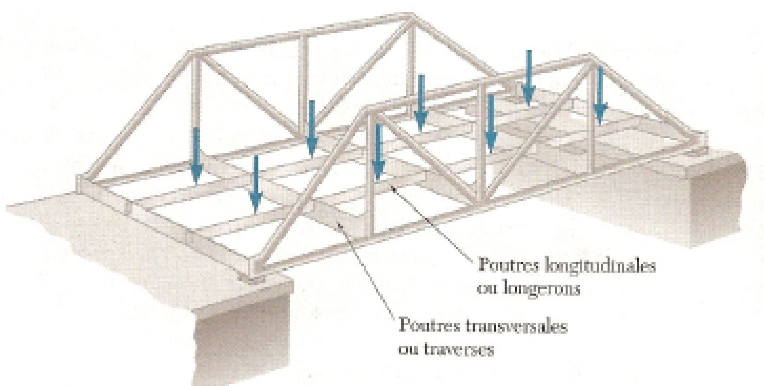


Figure 6.3

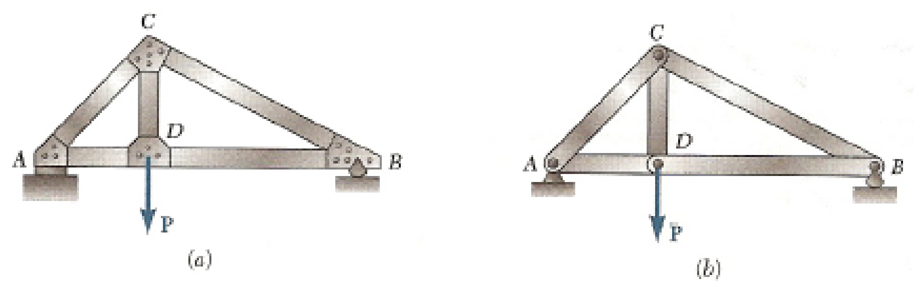
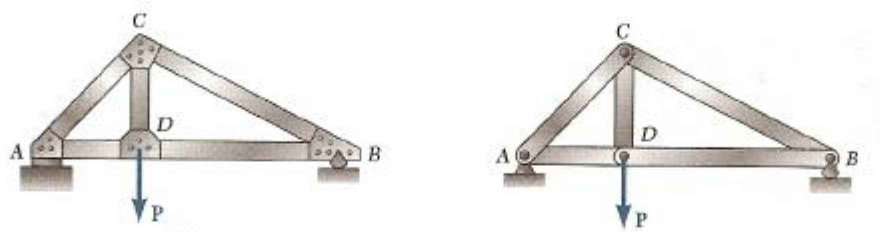


Figure 6.2

Membrures à 2 forces habituellement minces, supportent mal les forces latérales.
Les charges sont appliquées sur les **nœuds** et non sur les membrures.

FORCE dans les MEMBRURES

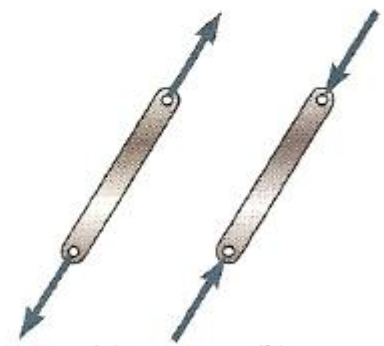
Joints entre membrures: Rivets, boulons, soudure



(a) (b)

Figure 6.2

Membrures à 2 forces:
TENSION ou COMPRESSION



(a) (b)

Figure 6.4

DIFFÉRENTS TYPES de TREILLIS

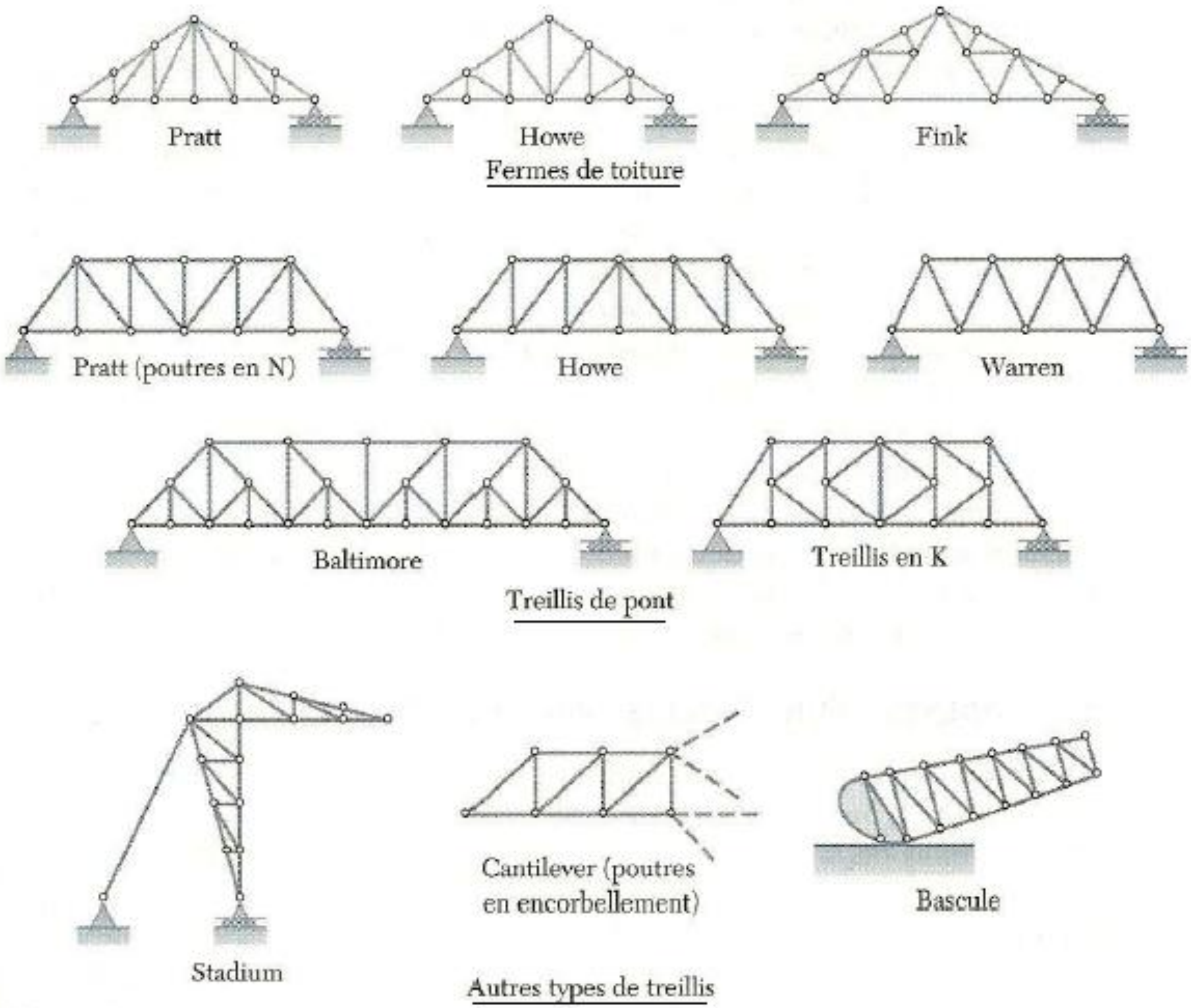


Figure 6.5

TREILLIS COMPOSÉS

Assemblage de **treillis simples**

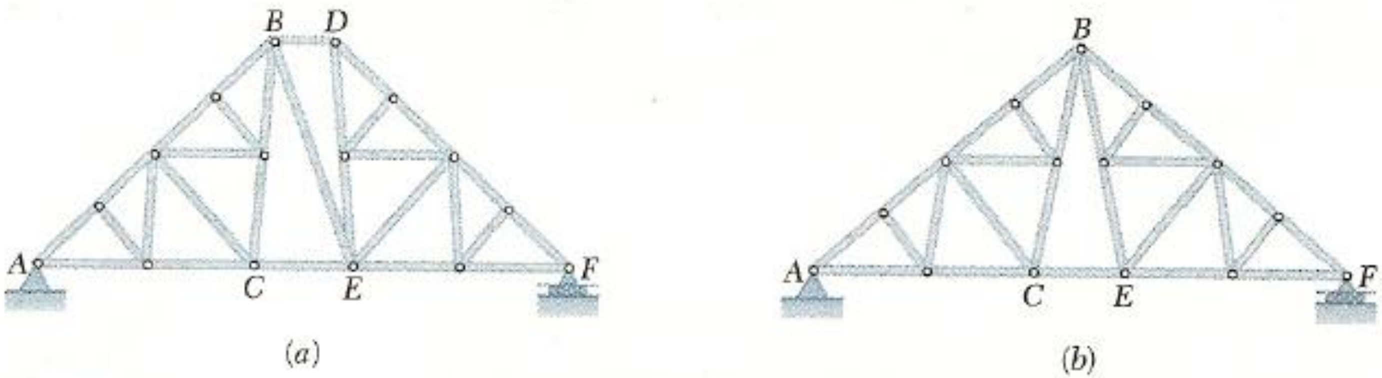


Figure 6.17

$$m + r = 2n$$

29 membrures + 3 réactions aux appuis = 2(16 nœuds)

32 inconnues = 32 équations d'équilibre

27 membrures + 3 réactions aux appuis = 2(15 nœuds)

30 inconnues = 30 équations d'équilibre

Structure statiquement déterminée, rigide et complètement liée

TREILLIS COMPOSÉS

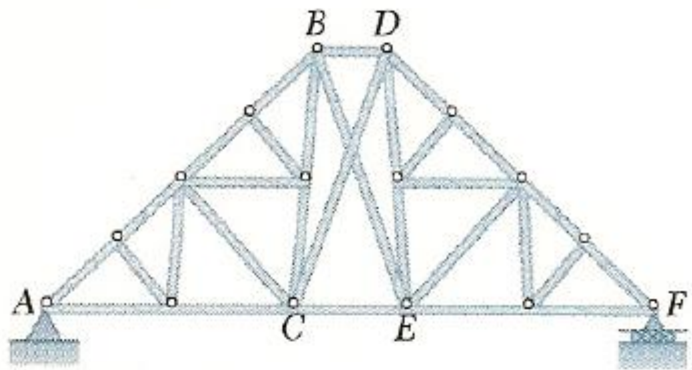


Figure 6.18

m + r > 2n

30 membrures + 3 réactions aux appuis > 2(16 nœuds)

33 inconnues > 32 équations d'équilibre

Structure statiquement indéterminée, hyperrigide

TREILLIS COMPOSÉS

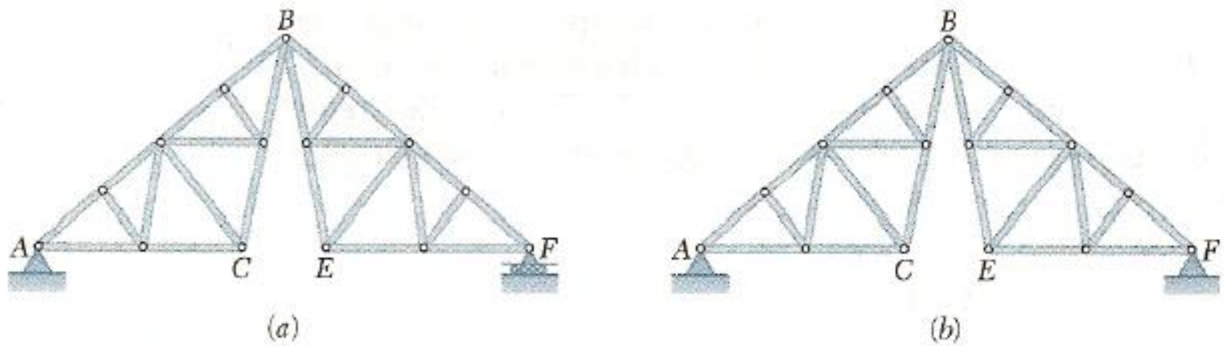


Figure 6.19

m + r < 2n

26 membrures + 3 réactions aux appuis < 2(15 nœuds)
29 inconnues < 30 équations d'équilibre

Structure hyporigide - Effondrement

Pour régler le problème:
26 membrures + 4 réactions aux appuis = 2(15 nœuds)

Analyse des treillis par la méthode des sections

Calculs des efforts dans les barres : Méthode des sections (ou des moments) de Ritter.

"La méthode des moments de Ritter consiste à étudier l'équilibre rotationnel d'une fraction de treillis isolée au moyen d'une section menée imaginairement à travers le treillis de façon à mettre à nu l'effort (ou les efforts) dans la barre (ou les barres) qui nous intéresse (ent)".

1. Déterminer les **réactions** à partir de l'équilibre du DCL global du treillis (si nécessaire !)

2. Faire une coupe (coupe « n-n ») à travers **3 membrures** ou moins (**3 forces inconnues)**

3. Tracer le DCL partiel de la fraction de treillis citée d'un côté ou de l'autre de la coupe transversale « n-n »

4. Écrire les **3 équations d'équilibre** pour la partie isolée du treillis ne contenant **qu'une seule inconnue** :

$$(+) \rightarrow \sum F_x = 0 \quad (+) \uparrow \sum F_y = 0 \quad (+) \circlearrowleft \sum M_C = 0$$

ou

$$(+) \circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad (+) \circlearrowleft \sum M_B = 0 \quad (+) \circlearrowleft \sum M_C = 0$$

A, *B* et *C* ne doivent pas être sur la même droite !

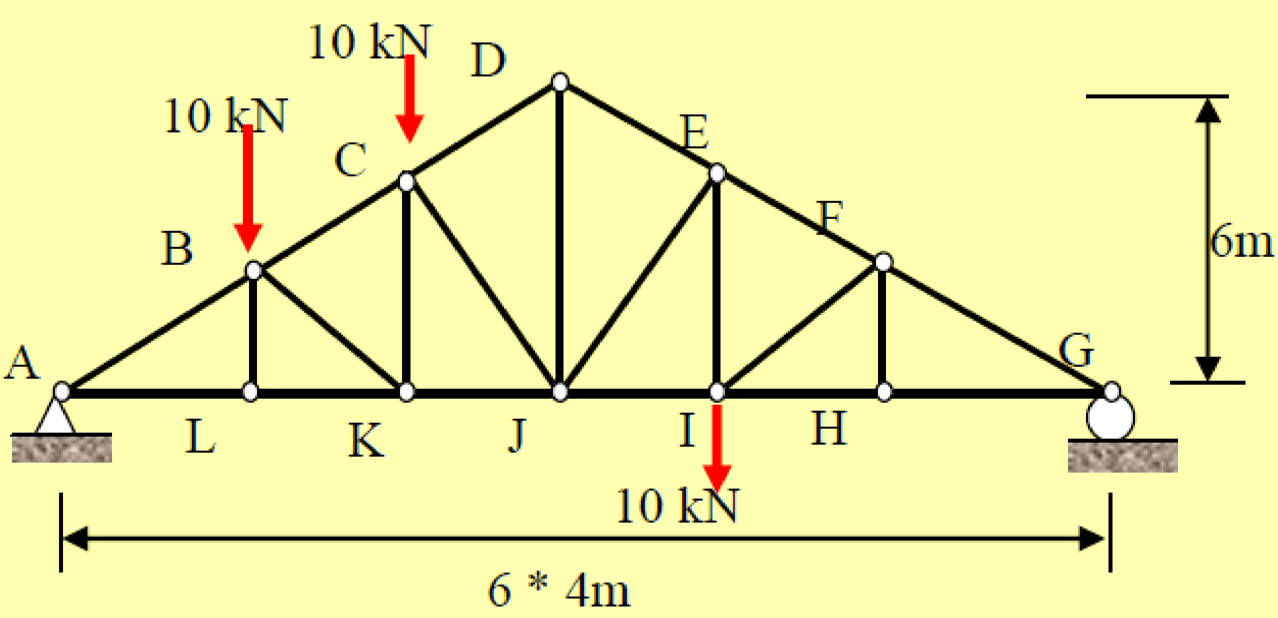
Ou toute combinaison de trois équations ne contenant **qu'une seule inconnue**

- Cette méthode permet de déterminer l'effort dans une barre d'un treillis sans avoir à déterminer les efforts dans toutes les barres.

- La technique consiste à isoler une partie du treillis sous la forme d'un DCL en coupant le treillis à l'endroit où l'on souhaite connaître l'effort dans les barres.

Exemple 4.2

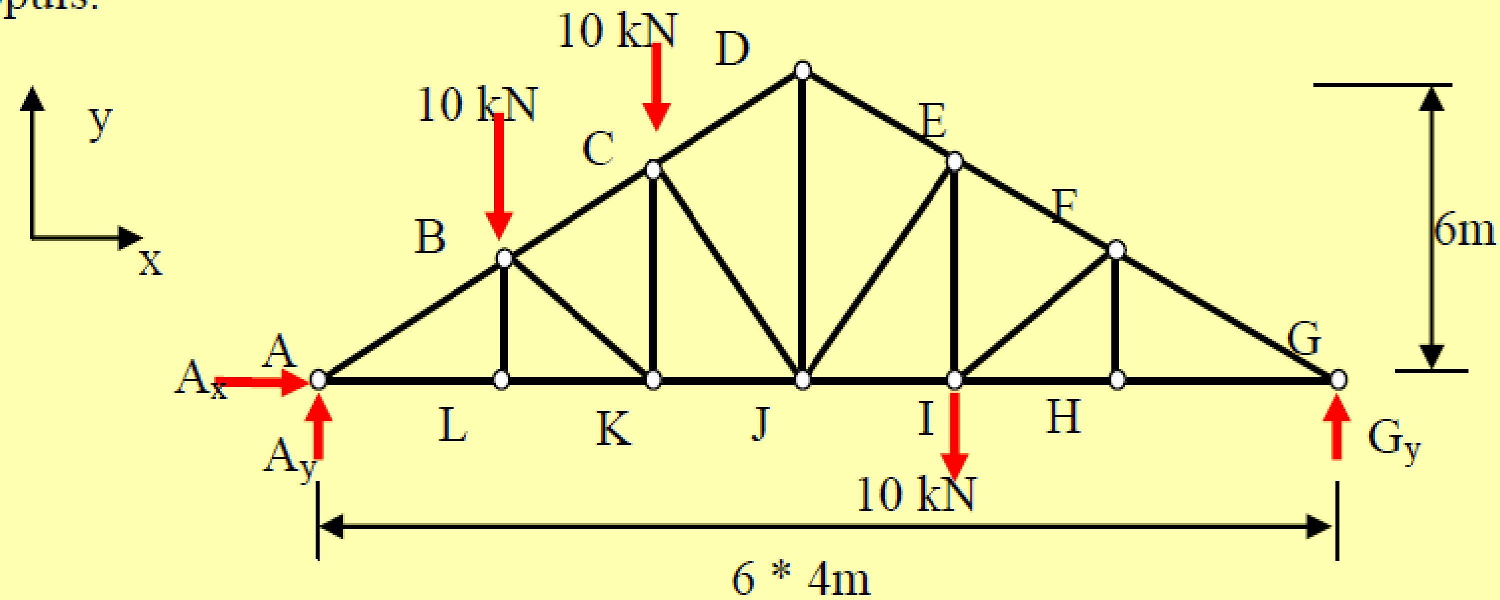
Calculez la force dans la barre DJ de la ferme de toit illustrés.



Solution

Dans ce cas si, il est impossible de tracer une section à travers DJ sans devoir couper quatre éléments dont les efforts sont inconnus. Il faut donc faire une première coupe (barres CD, CJ et KJ) avant d'analyser une deuxième section contenant la barre DJ.

Avant de faire une coupe, il faut faire le DCL global pour trouver les réactions aux appuis.

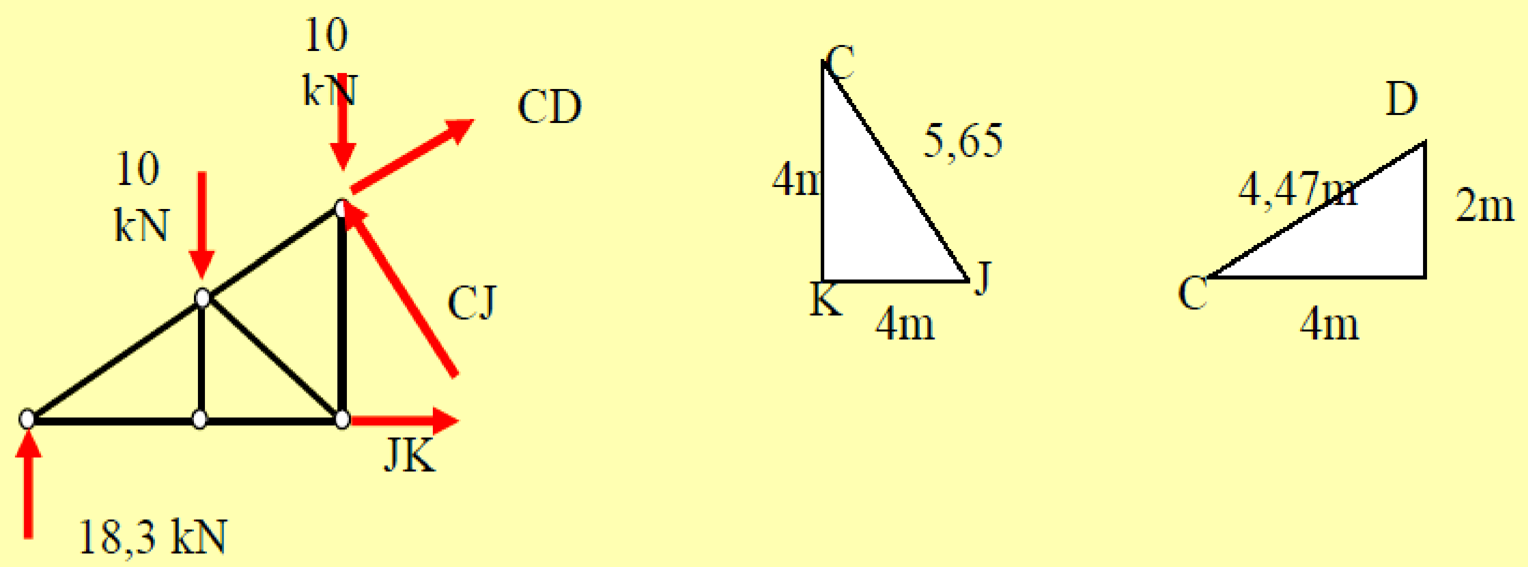


$$\sum F_x = 0 \;\rightarrow\; A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \;\rightarrow\; 10 * 4 + 10 * 8 + 10 * 16 - G_y * 24 = 0 \;\rightarrow\; G_y = 11{,}67\ kN$$

$$\sum F_y = 0 \;\rightarrow\; A_y + G_y - 10 - 10 - 10 = 0 \;\rightarrow\; A_y = 18{,}3\ kN$$

Traçons un premier DCL partiel.



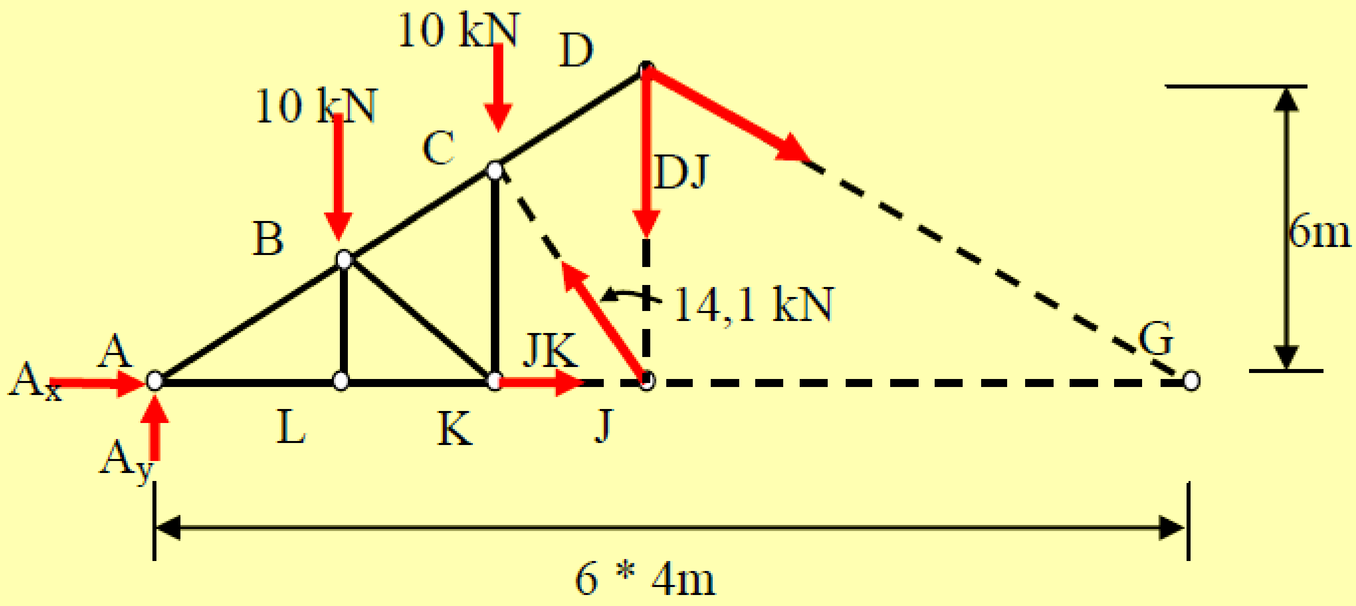
Les barres coupées deviennent des forces inconnues; il est donc possible de résoudre ce système à trois inconnues.

$$\sum M_A = 0 \;\rightarrow\; CJ\left(\frac{4}{5,65}\right)12 - 10 * 4 - 10 * 8 = 0 \;\rightarrow\; CJ = 14,1\,kN\,C$$

$$\sum M_J = 0 \;\rightarrow\; CD\left(\frac{4}{4,47}\right)6 - 18,3 * 12 - 10 * 4 - 10 * 8 = 0 \;\rightarrow\; CD = -18,6\,kN$$

CD = 18,6 kN C

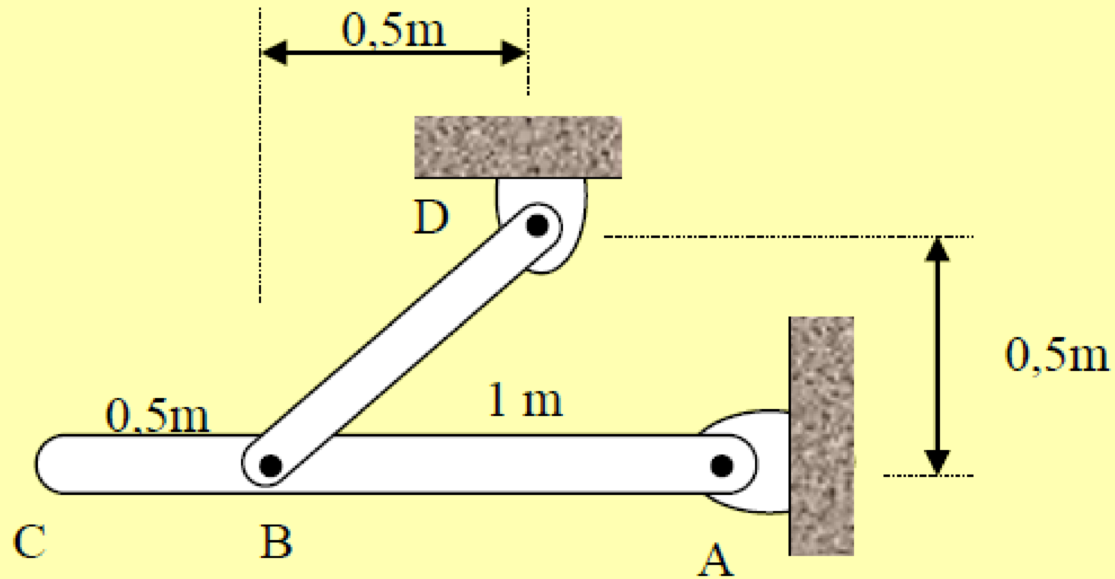
On peut calculer la barre JK, mais ce n'est pas nécessaire pour solutionner le problème. On trace maintenant le deuxième DCL.



$$\sum M_G = 0 \rightarrow 12\,DJ + 10 * 16 + 10 * 20 - 18{,}3 * 24 - 14{,}1 * \left(\frac{4}{5{,}65}\right) 12 = 0 \;\rightarrow DJ = 16{,}6\,kN\ T$$

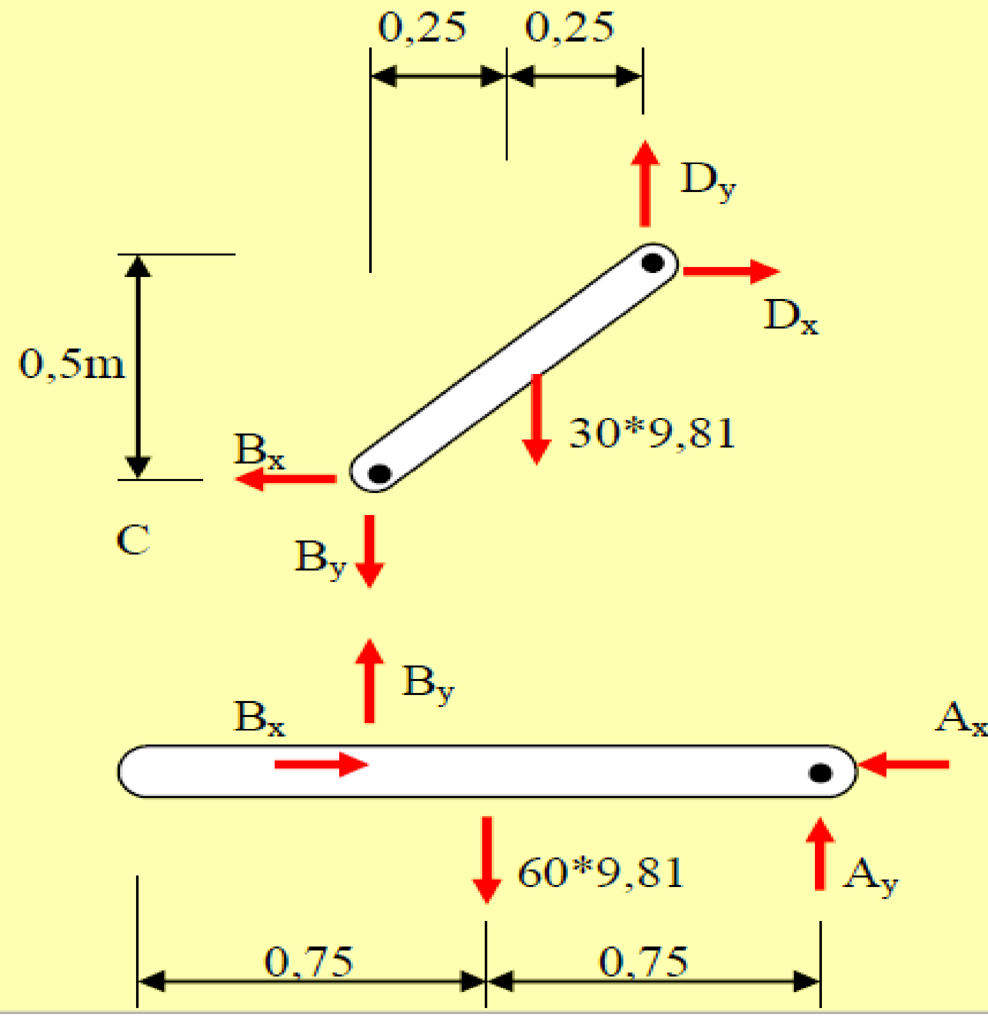
Exemple

Deux barres uniformes sont retenues dans un plan vertical. Si la masse de AC est de 60 kg et celle de BD est de 30 kg, et que les deux barres ont leur centre de masse au milieu de leur longueur, calculez la force supportée par l'axe en A.



Solution

Est-ce que le système demeure rigide si on enlève les appuis?
Non, donc on doit faire des DCL partiels.



Barre AB

$$\sum M_A = 0 \;\rightarrow\; -B_Y * 1 + 60\,(9{,}81) * 0{,}75 \;= 0 \;\rightarrow\; B_y = 441{,}5\,N$$

$$\sum F_y = 0 \;\rightarrow\; A_y - 60(9{,}81) + 441{,}5 = 0 \;\rightarrow\; A_y = 147{,}2\,N$$

$$\sum F_x = 0 \;\rightarrow\; B_X - A_x = 0 \rightarrow\; B_X = A_x$$

Barre BD

$$\sum M_D = 0 \;\rightarrow\; 30(9{,}81) * 0{,}25 + 441{,}5 * 0{,}5 - B_X * 0{,}5 = 0 \;\rightarrow\; B_X = 588{,}6\,N$$

$A_x = 588{,}6$ N

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{147{,}2^2 + 588{,}6^2} = 606{,}7\,N$$

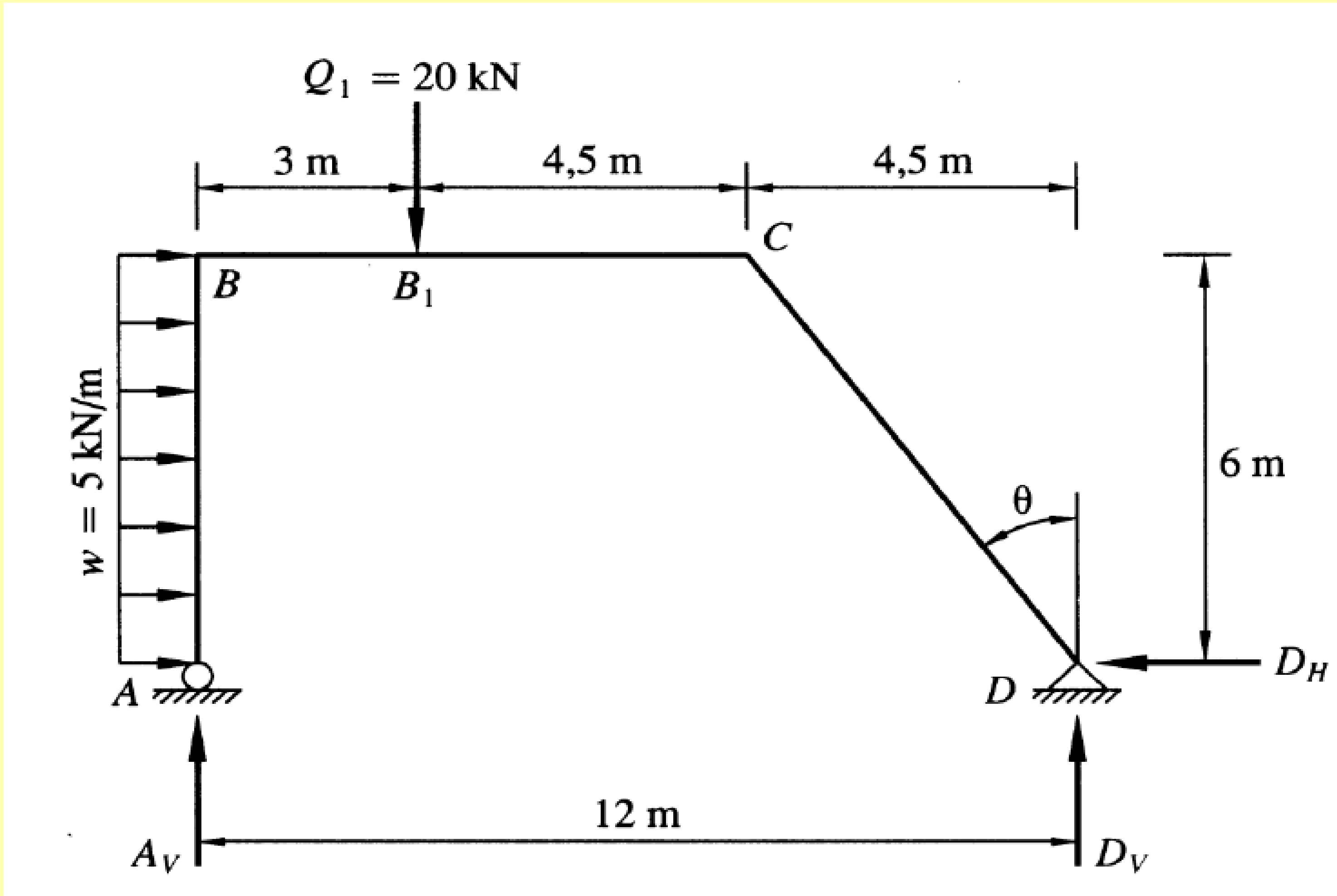
Les portiques et les arches

Les portiques

Un portique est composé d'éléments horizontaux ou inclinés pour reprendre les charges verticales (les poutres), et d'éléments verticaux pour reprendre les charges horizontales (les colonnes). On distingue deux types de portiques isostatiques, ***avec ou sans articulations***.

L'analyse d'un portique consiste d'abord à déterminer les réactions d'appuis et ensuite à évaluer les efforts internes agissant aux joints ou aux articulations. La détermination des efforts internes sera vue en Analyse des structures

Exemple 4.4 : Déterminer les réactions aux appuis du portique suivant. (*Tiré de A. Samikiam*).



Calcul des réactions

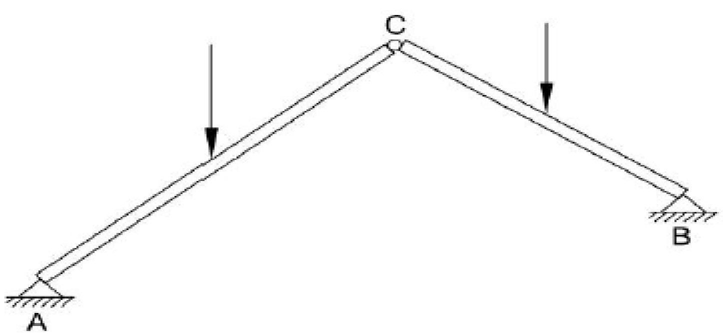
$$\sum M_A = 0 \qquad D_V \times 12 - 20 \times 3 - \frac{5 \times 6^2}{2} = 0 \qquad D_V = 12,5\,kN$$

$$\sum F_H = 0 \qquad 5 \times 6 - D_H = 0 \qquad D_H = 30\,kN$$

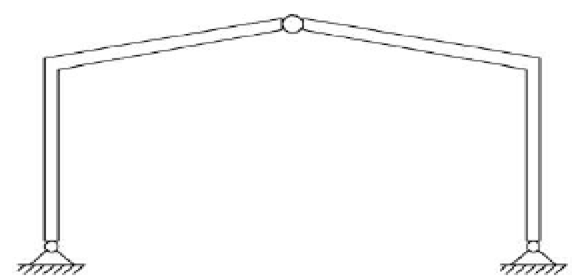
$$\sum F_V = 0 \qquad A_V + D_V - 20 = 0 \qquad A_V = 7,5\,kN$$

Arches et portiques à 3 articulations

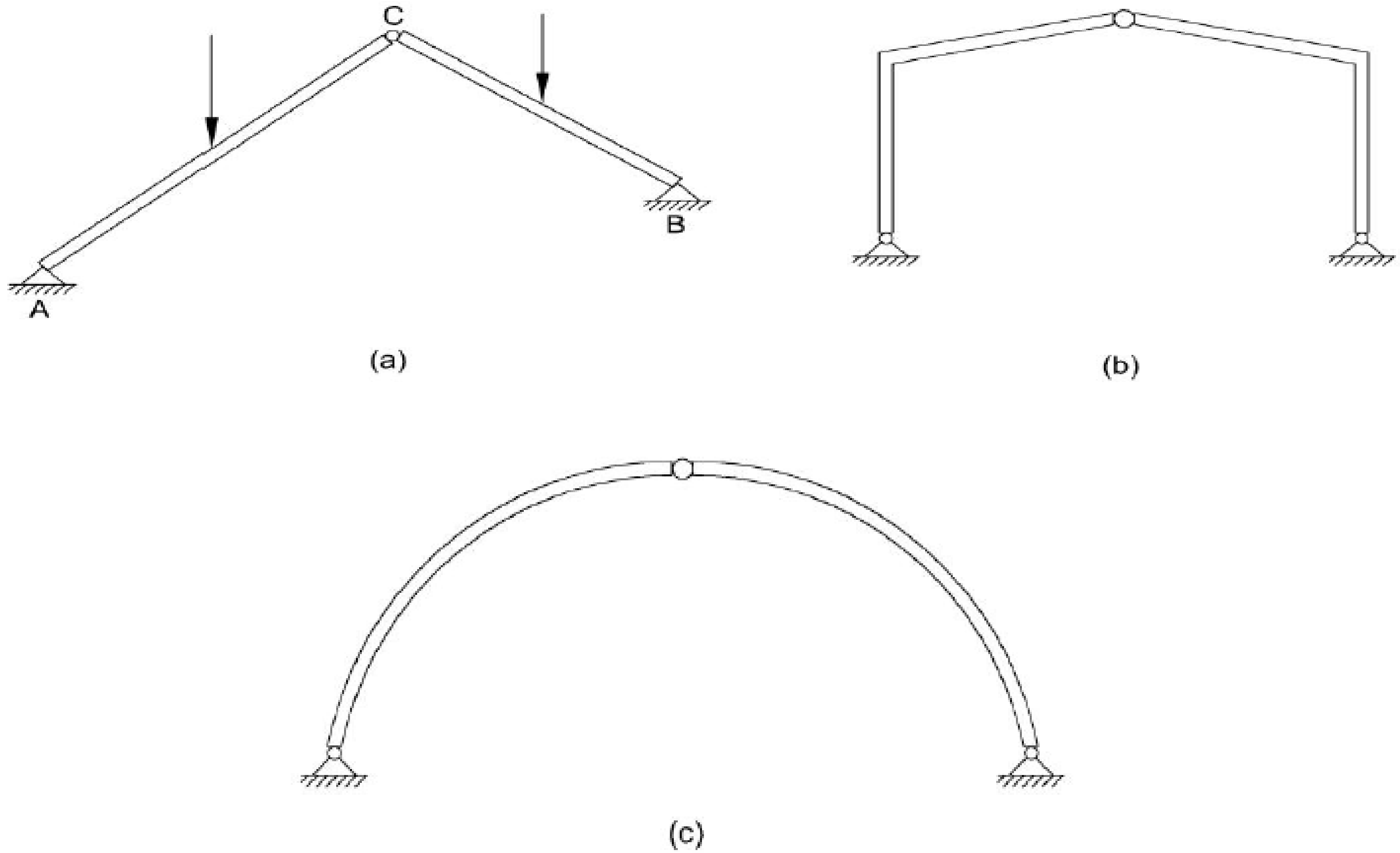
On appelle arche ou portique à trois articulations, une structure composée de deux poutres droites polygonales ou courbes



(a)



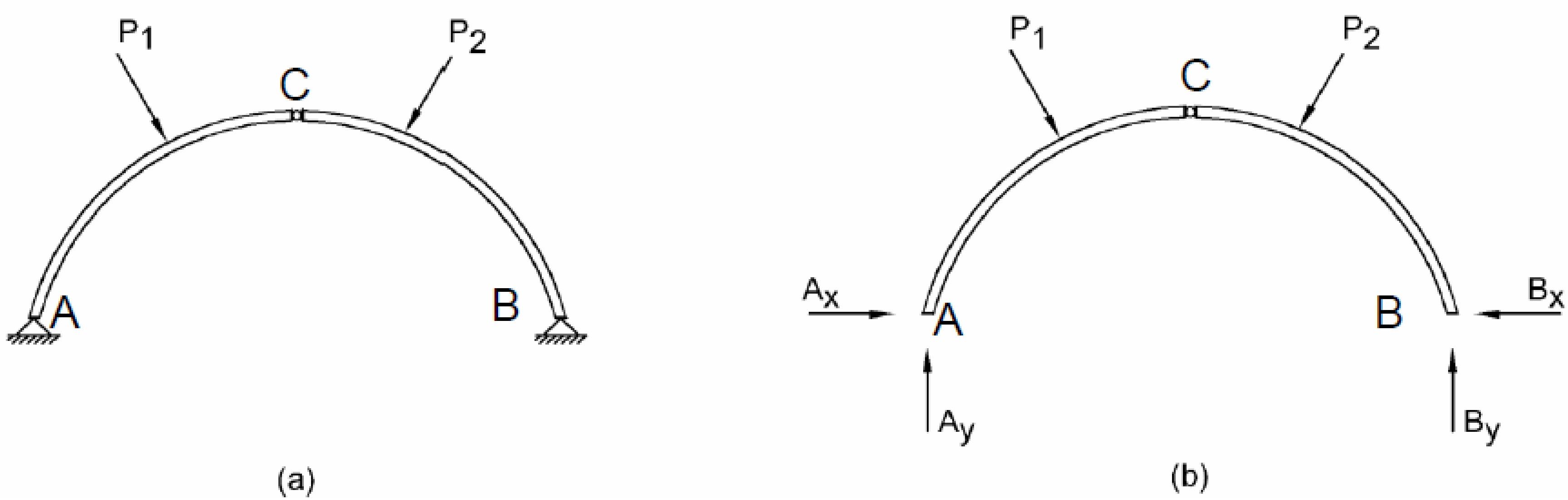
(b)



Arches et portiques à 3 articulations

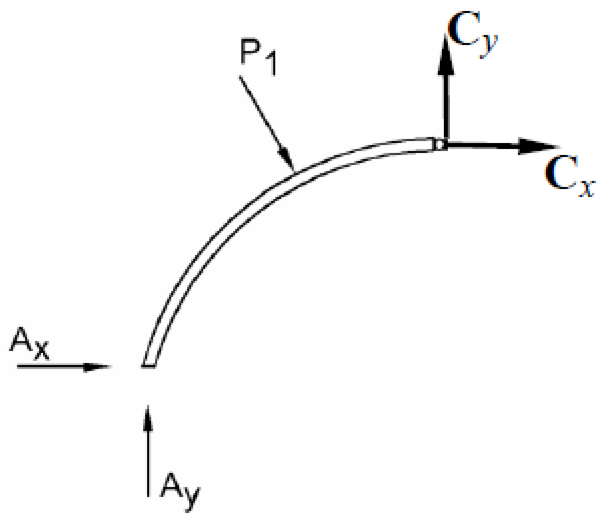
Calcul des réactions d'appui

Une arche à trois articulations peut paraître, à première vue, indéterminée compte tenu de ces quatre inconnues composantes de réactions d'appui (deux à chaque appui articulé . Toutefois, on remarquera qu'en plus des trois équations d'équilibre usuelles, une quatrième équation est disponible à cause de la rotule au point C ($\Sigma M/_C = 0$). Il est évident que, si la rotule au point C n'existait pas, l'arche serait bel et bien indéterminée (trois équations pour quatre inconnues).



Équilibre global de l'arche ABC :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow fn(A_x \quad B_x)$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow fn(A_y \quad B_y)$$
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow fn(B_y)$$

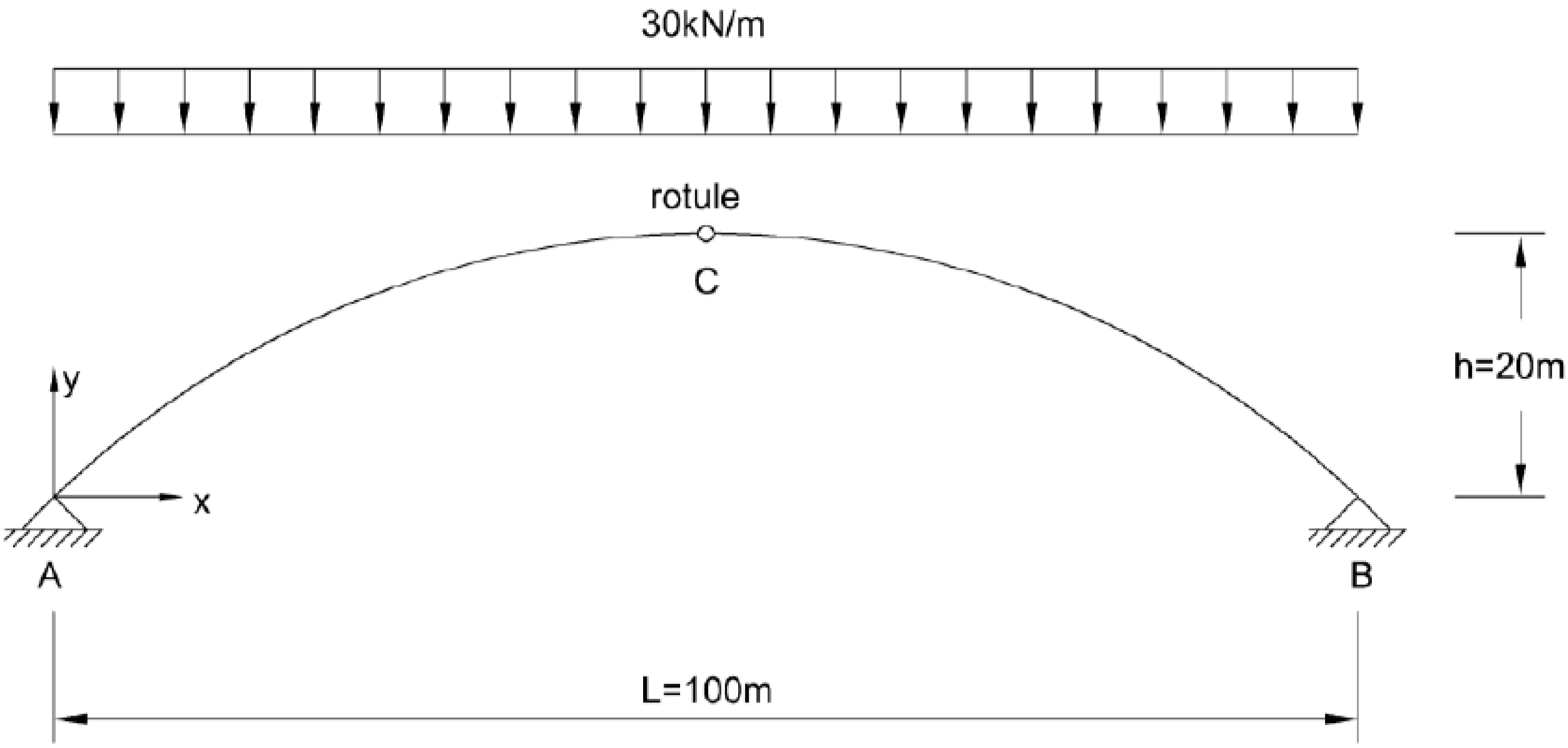


Équilibre partiel de AC : $\sum M_C = 0 \Rightarrow fn(A_x \quad A_y)$

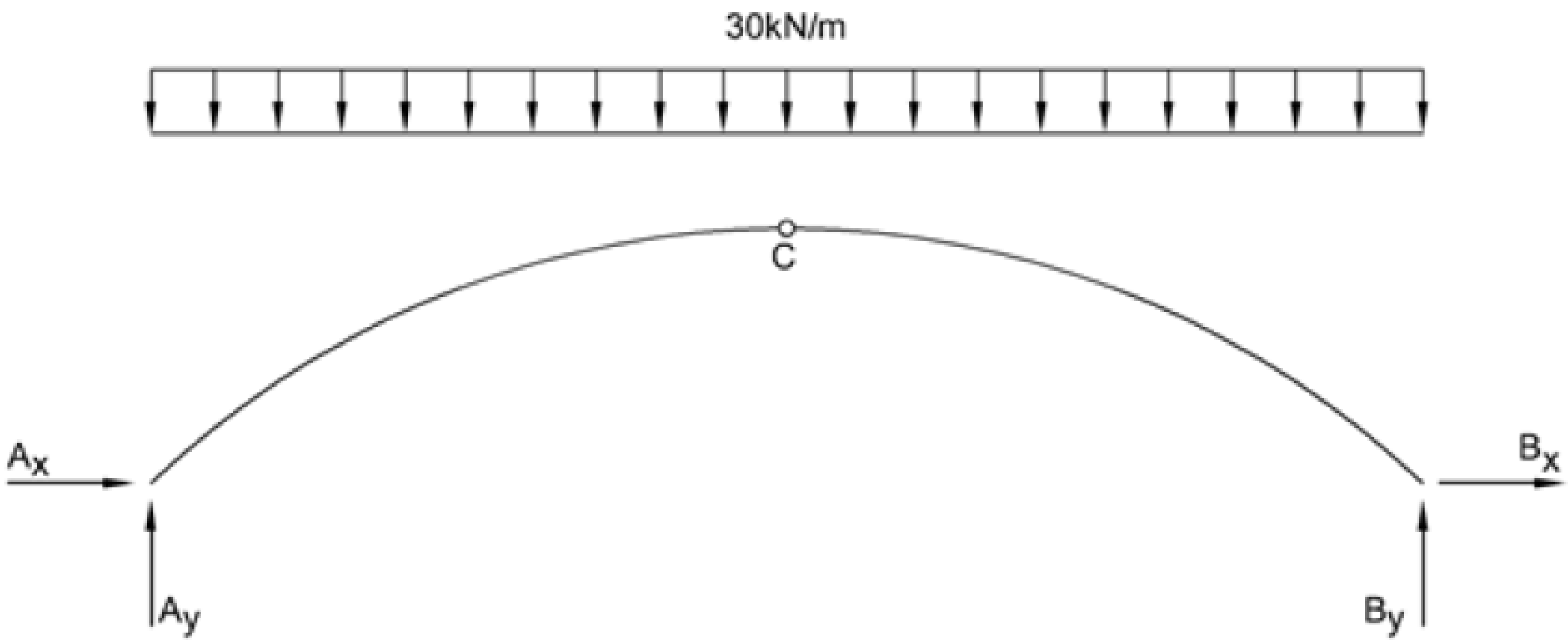
Analyse d'une arche à 3 articulations

Exemple **Arche avec charge uniformément répartie**

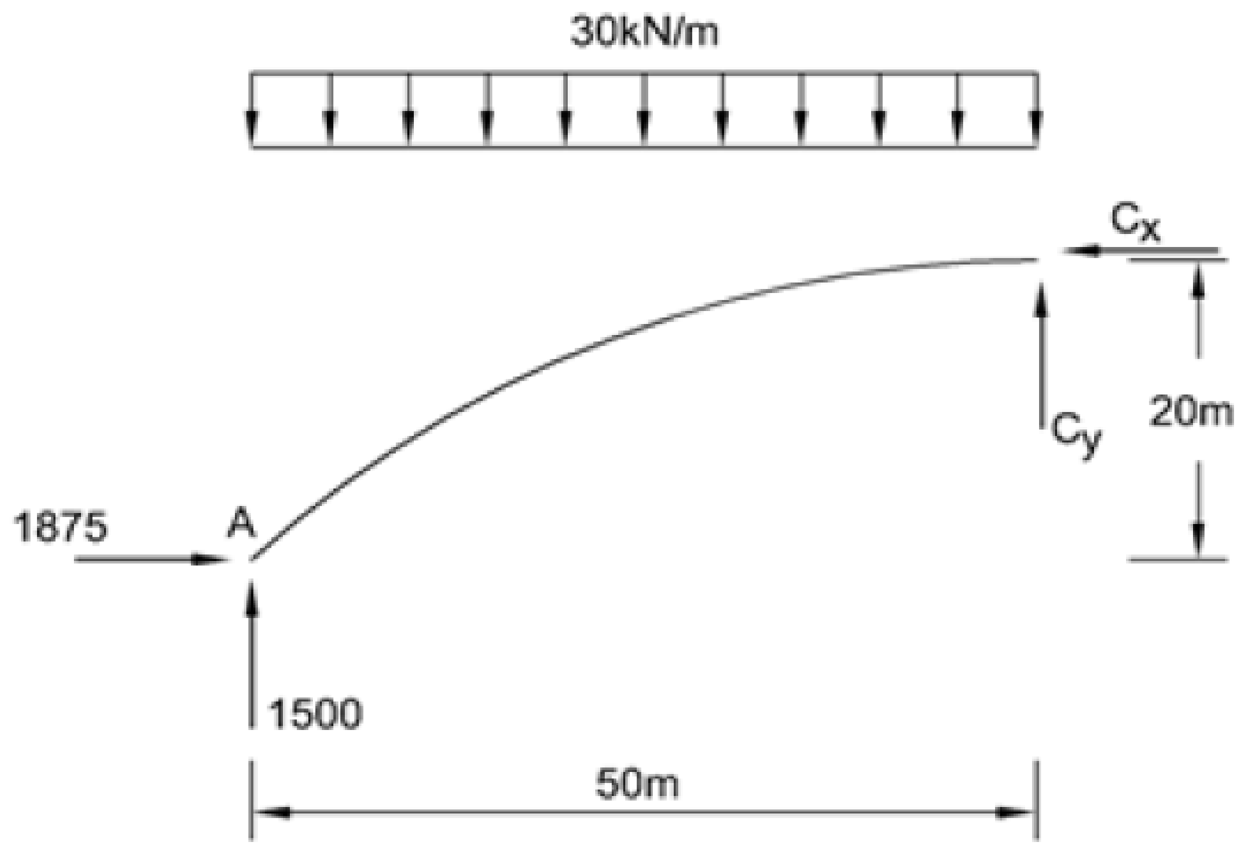
Considérer l'arche parabolique à trois articulations sollicitée par une charge uniformément répartie de 30 kN/m Déterminer les réactions d'appui et la force transmise par la rotule C.



(a) Arche



(b) DCL en entier



(c) DCL - AC

- sur *DCL* en entier

$$\Sigma M_B = 0$$
$$-A_y \times 100 + 30 \times 100 \times 100/2 = 0$$
donc $A_y = 1500$ kN ↑

$$\Sigma F_y = 0$$
$$A_y + B_y - 30 \times 100 = 0$$
donc $B_y = 1500$ kN ↑

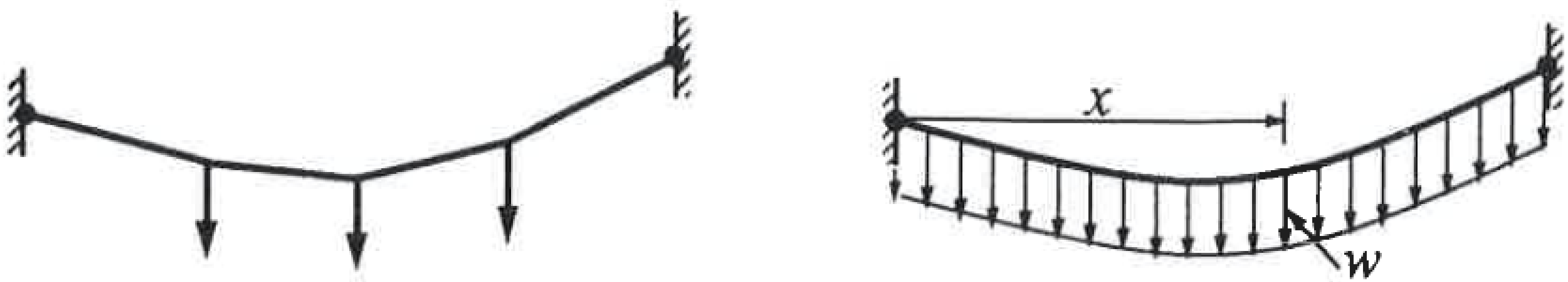
$$\Sigma F_x = 0$$
$$A_x + B_x = 0$$

- sur *DCL* du segment *AC*

$$\Sigma M/_C = 0$$
$$- A_y \times 50 + A_x \times 20 + 30 \times 50^2/2 = 0$$
donc $A_x = 1875$ kN →
et $B_x = -1875$ kN ←

Introduction à l'étude des câbles

Définition: Élément flexible travaillant en traction; la traction dans le câble varie lorsque le câble est chargé transversalement à son axe.



Charges concentrées — Charge répartie

Fig. 7.25

Équilibre d'un élément infinitésimal du câble sous l'action d'une charge répartie <u>selon l'horizontale</u> [$w = w\ (x)$].

$\Sigma F_y = 0:$

$$(T + dT)\sin(\theta + d\theta) = T\sin\theta + w\,dx \quad (54)$$

$\Sigma F_x = 0:$

$$(T + dT)\cos(\theta + d\theta) = T\cos\theta \quad (55)$$

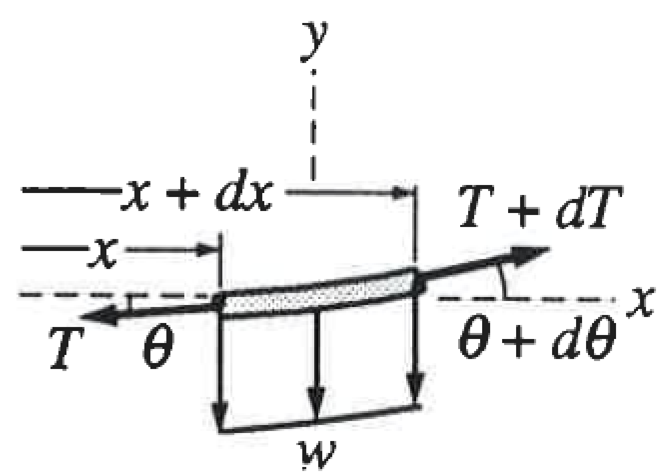


Fig. 7.26

Relations trigonométriques $\begin{cases} \sin(\theta + d\theta) = \sin\theta\cos d\theta + \cos\theta\sin d\theta \\ \cos(\theta + d\theta) = \cos\theta\cos d\theta - \sin\theta\sin d\theta \end{cases}$

Ces relations ainsi que $\cos d\theta = 1$, $\sin d\theta = d\theta$ et $dT\, d\theta = 0$ donnent:

$$T\cos\theta\, d\theta + \sin\theta\, dT = w\, dx \qquad \text{ou} \qquad d(T\sin\theta) = w\, dx \tag{56a}$$

$$-T\sin\theta\, d\theta + \cos\theta\, dT = 0 \qquad \text{ou} \qquad d(T\cos\theta) = 0 \tag{56b}$$

L'équation (56b) signifie que la composante horizontale de T ne change pas, ce qui est évident sur la figure 7.26. La composante horizontale,dénotée H, est donc <u>constante</u> le long du câble. Selon l'équation (56b):

En substituant $T = H/\cos\theta$ dans (56a) et avec $\tan\theta = dy/dx$, on obtient;

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w\,(x)}{H} \tag{58a}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{H} \int w\,(x)\,dx + K_1 \tag{58b}$$

$$y = \frac{1}{H} \int [\int w\,(x)\,dx]\,dx + K_1\,x + K_2 \tag{58c}$$

<u>Solution avec charge uniforme</u> (w = constante)

(choix du système d'axes au point le plus bas du câble; $T = H$ en $x = 0$ si le câble est horizontal en $x = 0$).

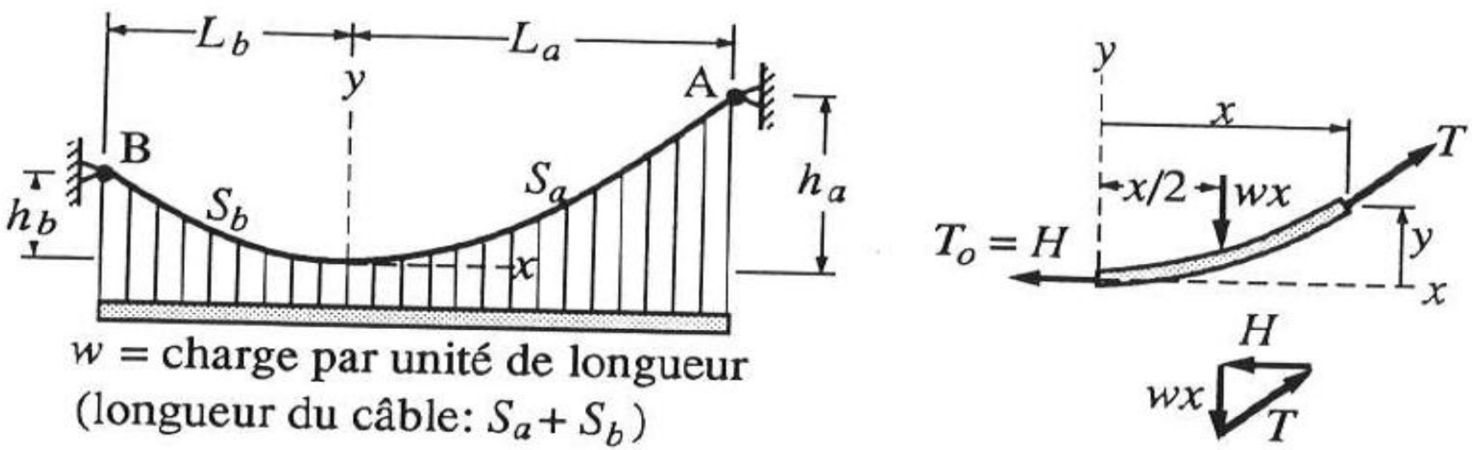


Fig. 7.27

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{wx}{H} + K_1}$$

La constante d'intégration est nulle ($K_1 = 0$) si, pour $x = 0$, $dy/dx = 0$.

$$\int_0^y dy = \int_0^x \frac{wx}{H}\,dx \longrightarrow \boxed{y = \frac{wx^2}{2H}} \tag{59}$$

Le câble prend donc une forme parabolique sous une charge uniforme.

Puisque $y = h_a$ en $x = L_a \longrightarrow H = w\,L_a^2/2\,h_a$ (60)

Selon la figure 7.27:

$$T = \sqrt{H^2 + (wx)^2} \tag{61}$$

$$T = w\,\sqrt{x^2 + (L_a^2/2\,h_a)^2} \tag{62}$$

À $x = L_a$, on obtient

$$T_{\max} = w\,L_a \sqrt{1 + (L_a/2h_a)^2} \tag{63}$$

On peut démontrer que

$$S_a \simeq L_a \left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{h_a}{L_a}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{h_a}{L_a}\right)^4\right] \tag{64}$$

Pour la portion de câble située entre l'origine et l'appui B, il suffit de remplacer h_a par h_b, L_a par L_b et S_a par S_b.

Pont suspendu

$(\frac{h}{L} < \frac{1}{4})$

$$h_a = h \quad , \quad L_a = \frac{L}{2} \quad , \quad S = 2S_a$$

$$T_{\max} = \frac{wL}{2} \sqrt{1 + (L/4h)^2} \tag{65}$$

$$S = L \left[1 + \frac{8}{3}\left(\frac{h}{L}\right)^2 - \frac{32}{5}\left(\frac{h}{L}\right)^4\right] \tag{66}$$

$$H = wL^2/8h \tag{67}$$

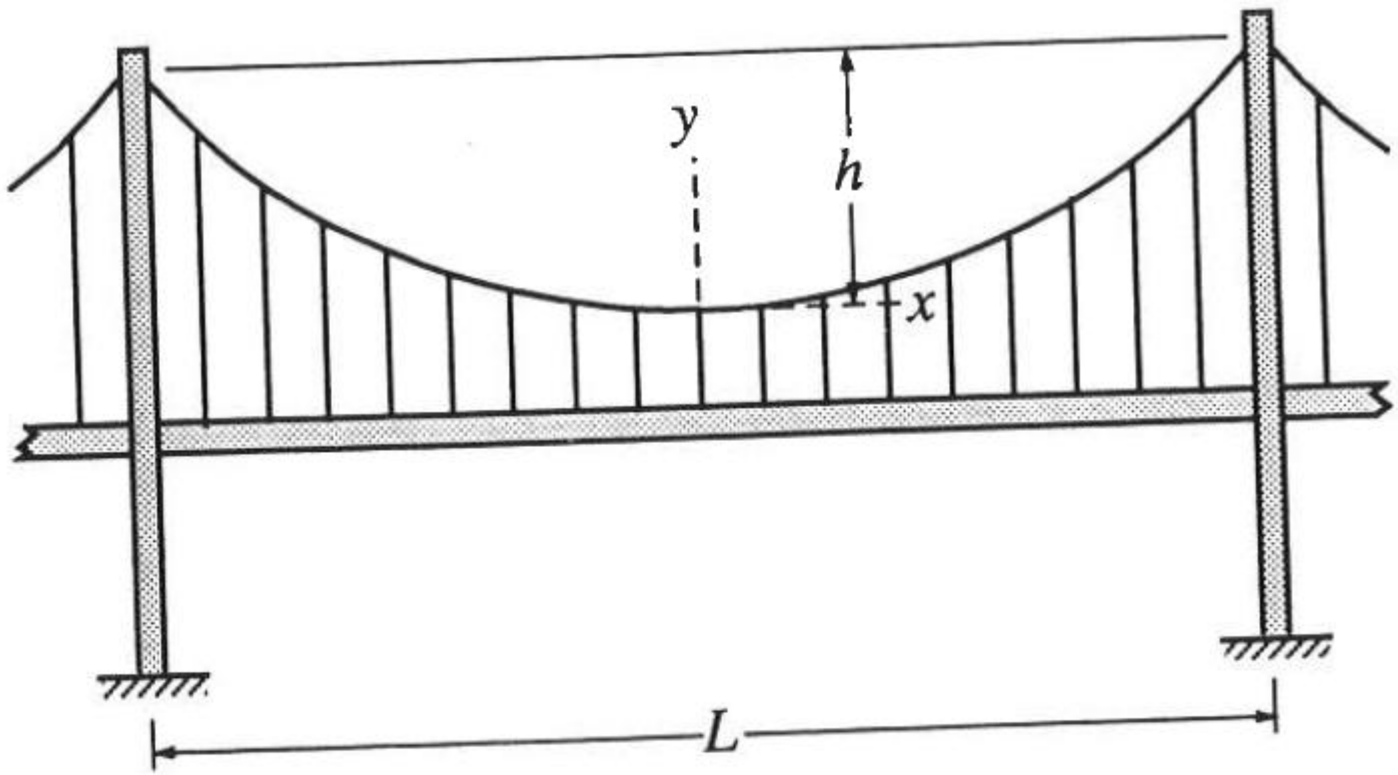


Fig. 7.28